

УДК 539.3

Алексей ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР \*

## О КРАЕВОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представил Ю. Энгельбрехт)

Выполнен асимптотический анализ краевого напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки. Исследована асимптотика вклада погранслоев в формирование краевых упругих явлений в тонкой упругой оболочке в зависимости от характера краевого закрепления. Обсуждена правомерность использования сдвиговых теорий для уточнения расчета краевых напряженно-деформированных состояний в тонких оболочках и пластинках.

1. Точки  $P$  упругого изотропного тела, образующего оболочку, будем задавать традиционными координатами

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = M(\alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 n, \quad (1.1)$$

где  $M$  — радиус-вектор срединной поверхности, отнесенной к линиям кривизны,  $n$  — единичный вектор нормали,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — параметры координатной системы. Должны выполняться неравенства  $-h \leq \alpha_3 \leq h$ , в которых  $h$  — полутолщина оболочки, а величина  $h/R$  ( $R$  — характерный размер срединной поверхности) много меньше единицы и является основным малым параметром в предстоящих асимптотических рассуждениях. Трехмерное напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки определяется напряжениями  $\sigma_{ij}$  и перемещениями  $v_i$ , которые должны удовлетворять дифференциальным уравнениям теории упругости (они в координатной системе (1.1) выписаны, например, в [1]) и лицевым условиям

$$\sigma_{i3} = \Sigma_{i3}^{\pm} \quad \text{при} \quad \alpha_3 = \pm h \quad (i=1, 2, 3),$$

задающим силы  $\Sigma_{i3}^{\pm}$ , приложенные к лицевым поверхностям оболочки.

Считается также, что оболочка имеет торцы (поверхности  $M = m + \alpha_3 n$ , где  $m$  — радиус-вектор некоторой кривой, лежащей на срединной поверхности). На них ставятся (в терминах трехмерной теории упругости) торцевые условия, выражающие характер их закрепления.

Используется

*основная концепция:* в статическом случае общее НДС тонкого трехмерного упругого тела, образующего оболочку, состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю оболочку, и погранслоев, локализующихся вблизи торцов или других концентраторов напряжений.

2. Внутреннее НДС оболочки можно построить так: зададим напряжения и перемещения упругой среды, отнесенной к координатам (1.1), следующим образом:

\* Институт проблем механики Российской АН, проспект Вернадского 101, 117526 Москва, Россия.



$$\begin{aligned}
\tau_i &= \left(1 + \zeta \frac{h}{R_j}\right) \sigma_{ii} = \lambda^l (\tau_i^0 + \lambda^{-l+2p-c+b} \zeta \tau_i^1), \\
\tau_{ij} &= \left(1 + \zeta \frac{h}{R_j}\right) \sigma_{ij} = \lambda^l (\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+2p-c+b} \zeta \tau_{ij}^1), \\
\tau_{i3} = \tau_{3i} &= \left(1 + \zeta \frac{h}{R_j}\right) \sigma_{i3} = \lambda^p (\tau_{i3}^0 + \zeta \tau_{i3}^1 + \\
&\quad + \lambda^{-l+2p-c+b} \zeta^2 \tau_{i3}^2), \\
\tau_{33} &= \left(1 + \zeta \frac{h}{R_1}\right) \left(1 + \zeta \frac{h}{R_2}\right) \sigma_{33} = \\
&= \lambda^c (\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c+b} \zeta^2 \tau_{33}^2 + \lambda^{-2l+4p-2c+b} \zeta^3 \tau_{33}^3), \\
v_i &= \lambda^{l-p+b} (v_i^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta v_i^1), \\
v_3 &= \lambda^{l-c+b} (v_3^0 + \lambda^{-l+c} \zeta v_3^1).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

(Здесь и всюду, где не оговорено противоположное, считается, что  $i \neq j = 1, 2$ .)

В (2.1) приняты  $R_j$  и  $\zeta$  как главные радиусы кривизны срединной поверхности и безразмерная поперечная координата

$$\zeta = \frac{\alpha_3}{h}. \tag{2.2}$$

При этом считается, что величины

$$W = (\tau_i, \tau_{ij}, \tau_{i3}, \tau_{33}, v_i, v_3) \tag{2.3}$$

являются функциями двух независимых переменных  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , а зависимость внутреннего НДС от поперечной координаты  $\zeta$  выражена явно. Считается также, что  $W$  имеют вид  $O(\lambda^p)$  при одинаковом  $q$  для всех этих величин. Точка в (2.3) и ниже означает, что на соответствующем месте должен стоять числовой индекс.

Неотрицательные числа  $l, p, c, b$  в (2.1) можно выбрать произвольно, лишь с условием, чтобы выполнялись требования

$$p < l, \quad c = 0 \quad (\text{при } p < l/2), \tag{2.4}$$

$$c = 2p - l \quad (\text{при } p \geq l/2), \quad b \geq 0, \quad \lambda^l = \frac{R}{h}.$$

Это, в частности, значит, что  $\lambda$  — большой параметер, определяемый формулой (2.4).

Разобьем величины (2.3) на две группы.

Группу I зададим формулами

$$\begin{aligned}
\tau_i^0 &= \frac{1}{2R} T_i, \quad \tau_{ij}^0 = \frac{1}{2R} S_{ij}, \\
\tau_i^1 &= -\frac{3}{2R^2} \lambda^{2l-2p+c-b} G_i, \quad \tau_{ij}^1 = \frac{3}{2R^2} \lambda^{2l-2p+c-b} H_{ij}, \\
\tau_{i3}^0 + \frac{1}{3} \lambda^{-l+2p-c+b} \tau_{i3}^2 &= \frac{1}{2R} \lambda^{l-p} N_i, \\
v_i^0 &= \lambda^{-l+p-b} u_i, \quad v_3^0 = -\lambda^{-l+c-b} \omega, \\
v_i^1 &= -R \lambda^{-l-p+c-b} \gamma_i, \quad v_3^1 = -\lambda^{-b} \frac{\nu}{2E} (T_1 + T_2),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

а к группе II отнесем величины  $W'$ , которые не вошли в (2.5). Они выражаются прямыми действиями через величины группы I, т. е. формулами вида

$$W'(II) = F\{W'(I)\},$$

где  $F$  — линейный дифференциальный оператор.

В развернутом виде эти формулы даны в [1]. Здесь они не приводятся, так как для дальнейшего важен только факт их существования.

Показано [1], что если в (2.5) величины  $T_i, S_{ij}, G_i, H_{ij}, N_i, u_i, \omega, \gamma_i$  имеют тот же смысл, что и в [1] для итерационной теории оболочек, т. е. если удовлетворяются соответствующие двумерные дифференциальные уравнения, то с точностью  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$  будут удовлетворяться и трехмерные дифференциальные уравнения теории упругости, а также граничные условия (1.2).

Отметим, что здесь и ниже формулируемый результат считается полученным с точностью  $[0(\lambda^{-p})=0]$ , если ведущие к нему выкладки выполняются с отбрасыванием величин вида  $0(\lambda^{-p})$ , по сравнению с величинами порядка 1.

Формулы настоящего раздела приближенно определяют внутреннее НДС оболочки. Его можно рассматривать как исходное приближение итерационного процесса, позволяющего формально строить внутреннее НДС с произвольно высокой точностью.

3. Обратимся к обсуждению погранслоя и будем считать, во-первых, что это НДС строится вблизи координатной линии  $\alpha_1=0$  и, во-вторых, что направление его наибольшей изменчивости проходит вдоль  $\alpha_1$ -линии.

З а м е ч а н и е. По-прежнему будет использоваться координатная система (1.1). Это значит, что излагаемые здесь результаты относятся лишь к случаю, когда погранслоем возникает вблизи линии кривизны срединной поверхности. Переход к более общему случаю связан лишь с более громоздкими выкладками.

Выполним в уравнениях теории упругости замены искоемых величин по формулам

$$\begin{aligned} ES_{ii} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \sigma_{ii}, & ES_{ij} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_i}\right) \sigma_{ij}, \\ ES_{i3} &= ES_{3i} = \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_j}\right) \sigma_{i3}, & ES_{33} &= \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\alpha_3}{R_2}\right) \sigma_{33}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$V_m = h^{-1} v_m,$$

$$(i \neq j = 1, 2; m = 1, 2, 3)$$

и замены независимых переменных по формулам

$$\alpha_1 = R\lambda^{-l}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta \quad (3.2)$$

( $R, \lambda, h, p$  имеют тот же смысл, что и раньше).

Получившиеся уравнения разобьем на две группы и запишем следующим образом.

Группа А

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23}}{\partial \zeta} + \lambda^{-l} X_2(P) + \lambda^{-l+p} X_2(Q) &= 0, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial V_2}{\partial \xi_1} - 2(1+\nu) S_{12} + \lambda^{-l} e_{12}(P) + \lambda^{-l+p} e_{12}(Q) &= 0, \\ \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} - 2(1+\nu) S_{23} + \lambda^{-l} e_{23}(P) + \lambda^{-l+p} e_{23}(Q) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$



Группа B

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{13}}{\partial \zeta} \right] + \lambda^{-l+p} X_1(P) + \lambda^{-l} X_1(Q) = 0, \\ & \left[ \frac{1}{A_1} \frac{\partial S_{13}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{33}}{\partial \zeta} \right] + \lambda^{-l+p} X_3(P) + \lambda^{-l} X_3(Q) = 0, \\ & \frac{1}{A_1} \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} - [S_{11} - \nu(S_{22} + S_{33})] + \lambda^{-l+p} e_1(P) + \lambda^{-l} e_1(Q) = 0, \\ & - [S_{22} - \nu(S_{11} + S_{33})] + \lambda^{-l+p} e_2(P) + \lambda^{-l} e_2(Q) = 0, \\ & \frac{\partial V_3}{\partial \zeta} - [S_{33} - \nu(S_{11} + S_{22})] + \lambda^{-l+p} e_3(P) + \lambda^{-l} e_3(Q) = 0, \\ & \frac{\partial V_1}{\partial \zeta} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial V_3}{\partial \xi_1} - 2(1+\nu)S_{13} + \lambda^{-l+p} e_{13}(P) + \lambda^{-l} e_{13}(Q) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь  $A_i$  — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, а  $X_i(\cdot)$ ,  $e_i(\cdot)$  — дифференциальные выражения от преобразованных искоемых величин  $S$  и  $V$ . В частности,

$$X_1(P) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{12}}{\partial \xi_2} + 2 \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S_{12}, \quad (3.5)$$

$$X_1(Q) = R \frac{\zeta}{R_1} \frac{\partial S_{13}}{\partial \zeta} + \frac{R}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (S_{11} - S_{22}) + \frac{2}{R_1} S_{13},$$

$$X_2(P) = R \frac{\zeta}{R_2} \frac{\partial S_{23}}{\partial \zeta} + 2 \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S_{12} + \frac{2R}{R_2} S_{23}, \quad (3.6)$$

$$X_2(Q) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{22}}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (S_{22} - S_{11}),$$

$$X_3(P) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial S_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{R\lambda^{-p}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} S_{23}, \quad (3.7)$$

$$X_3(Q) = \frac{R}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} S_{13} - R \frac{S_{11}}{R_1} - R \frac{S_{22}}{R_2}.$$

Формулы для  $e_i(\cdot)$  имеют такую же структуру. Они в дальнейшем не понадобятся\*\*.

Смысл дополнительных записей  $(P)$  и  $(Q)$  в обсуждаемых формулах заключается в следующем. При обсуждении погранслоя вблизи линии  $\alpha_1 = \text{const}$  совокупность величин  $S_{ij}$ ,  $V_k$  удобно разбить на группы  $P$  и  $Q$

$$P = (S_{12}, S_{23}; V_2), \quad Q = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{13}; V_1, V_3). \quad (3.8)$$

Поэтому и в (3.3), (3.4) величины  $X_i(\cdot)$ ,  $e_i(\cdot)$  также разбиты на две группы, зависящие соответственно только от  $P$  и только от  $Q$ .

4. Уравнения (3.3), (3.4) можно кратко записать следующим образом:

$$A(P) + \lambda^{-l} Y_A(P) + \lambda^{-l+p} Z_A(Q) = 0, \quad (4.1)$$

$$B(Q) + \lambda^{-l+p} Y_B(P) + \lambda^{-l} Z_B(Q) = 0,$$

\*\* В уравнениях (3.4) — (3.7) не делается различия между  $S_{ij}$  и  $S_{ji}$ , хотя  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , как видно из (3.1), этому правилу подчиняются лишь приближенно. Для дальнейших приближенных выкладок это несущественно.



считая, что  $A(P)$ ,  $B(Q)$  — матрицы левых частей тех равенств, которые получаются из (3.3), (3.4) после отбрасывания слагаемых с множителями  $\lambda^{-l}$ ,  $\lambda^{-l+p}$ , а  $Y_A$ ,  $Z_A$ ,  $Y_B$ ,  $Z_B$  — матрицы тех величин, которые стоят при этих множителях. При этом легко заметить, что относительно независимых переменных  $(\xi'_1, \xi)$ , где  $\xi'_1 = \int A_1 d\xi_1$ , равенства  $A(P) = 0$  и  $B(Q) = 0$  представляет собой соответственно уравнения антиплоской и плоской задач теории упругости.

С точностью  $[0(\lambda^{-2l+2p}) = 0]$  для системы (4.1) можно построить приближенные решения двух типов. Определим их следующими равенствами:

*a*-решения

$$P(a) = P^0(a) + \lambda^{-l+p} P^1(a); \quad Q(a) = \lambda^{-l+p} Q^1(a); \quad (4.2)$$

*b*-решения

$$P(b) = \lambda^{-l+p} P^1(b), \quad Q(b) = Q^0(b) + \lambda^{-l+p} Q^1(b). \quad (4.3)$$

Смысл равенств (4.2), (4.3) заключается в том, что, например

$$S_{12}(a) = S_{12}^0(a) + \lambda^{-l+p} S_{12}^1(a), \quad S_{11}(a) = \lambda^{-l+p} S_{11}^1(a).$$

Аналогично определяются и остальные компоненты групповых неизвестных  $P$ ,  $Q$ .

Потребуем, чтобы выполнялись следующие уравнения

для *a*-решений

$$A[P^0(a)] = 0, \quad A[P^1(a)] + \lambda^{-p} Y_A [P^0(a)] = 0, \quad (4.4)$$

$$B[Q^1(a)] + Y_B [P^0(a)] = 0; \quad (4.5)$$

для *b*-решений

$$B[Q^0(b)] = 0, \quad B[Q^1(b)] + \lambda^{-p} Z_B [Q^0(b)] = 0, \quad (4.6)$$

$$A[P^1(b)] + Z_A [Q^0(b)] = 0. \quad (4.7)$$

Тогда, подставив (4.2) и (4.3) в равенства (4.1), убедимся, что эта система тождественно выполняется в силу (4.4) — (4.7), если в выкладках отбрасывать слагаемые вида  $0(\lambda^{-2l+2p})$ .

В *a*-решении или *b*-решении асимптотически главные напряжения и перемещения соответствующих НДС удовлетворяют системам уравнений, выражаемых первыми равенствами (4.4) или (4.6). Учитывая смысл входящих в них символов  $A[ ]$  и  $B[ ]$ , можно говорить, что общий погранслоев представляет собой сумму антиплоского и плоского погранслоев, и условимся отмечать компоненты соответствующего НДС записями (*a*) и (*b*).

5. Введем в рассмотрение следующие вспомогательные краевые задачи теории погранслоев.

В области

$$0 \leq \xi'_1 \leq d, \quad -1/2 \leq \xi_2 \leq 1/2, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (5.1)$$

трехмерного пространства, отнесенного к декартовым координатам  $(\xi'_1, \xi_2, \xi)$ , построить решение уравнений (3.3), (3.4), удовлетворяющее следующим требованиям:

(1) на лицевых поверхностях — условиям отсутствия напряжений

$$S_{13} = S_{23} = S_{33} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1; \quad (5.2)$$

(2) на дальнем торце  $(\xi'_1 = d)$  — условиям отсутствия перемещений

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 \quad \text{при} \quad \xi'_1 = d; \quad (5.3)$$

(3) на ближнем торце  $(\xi'_1 = 0)$  — неоднородным краевым условиям трехмерной теории упругости, которые будут выбраны ниже.



Вспомогательные краевые задачи здесь будут решаться с точностью  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$ . Поэтому можно считать, что система уравнений (4.1) общего погранслоя распадается на две самостоятельные системы (4.4), (4.5) и (4.6), (4.7), определяющие антиплоский и плоский погранслои соответственно. Лицевые и торцевые условия (5.2) и (5.3) можно также разбить на плоские (первые и третьи из них), относящиеся к плоскому погранслою, и на антиплоские (вторые), относящиеся к антиплоскому погранслою. Кроме того, можно считать, что такое разбиение допускает и несформулированные пока условия на ближнем торце  $\xi'_1=0$ . Это означает, что в рамках точности  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$  вспомогательная краевая задача общего погранслоя расчленяется на плоскую и антиплоскую вспомогательные задачи. В обеих соблюдается соответствие числа краевых условий и порядка дифференциальных уравнений. Считаем, что обе вспомогательные краевые задачи имеют решение (единственное) при тех условиях, которые предстоит ставить на ближнем торце (справедливость всех этих предположений станет очевидной ниже, при рассмотрении конкретных задач).

6. Потребуем дополнительно, чтобы решения вспомогательных задач имели затухающий (от ближнего к дальнему торцу) характер, и будем искать условия существования таких решений.

Из раздела 4 следует, что в рамках точности  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$  при решении антиплоской и плоской вспомогательных задач можно исходить из системы (3.3), (3.4), отбросив в первой из них члены с  $X.(Q)$ ,  $e.(Q)$ , а во второй — члены с  $X.(P)$ ,  $e.(P)$ . При этом общая система (3.3), (3.4) распадается на две замкнутые подсистемы относительно групповых неизвестных  $P$  и  $Q$  соответственно. Каждую из них в отдельности можно трактовать как упрощенные некоторым образом уравнения теории упругости: а именно, как неоднородные уравнения плоской и антиплоской задач. В системе (3.3) содержится только одно уравнение, выражающее уравнивание всех сил, действующих на выделенный элемент. Запишем его так:

$$F_2(a) \equiv \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} S_{12}(a) + \frac{\partial}{\partial \xi} S_{23}(a) + \lambda^{-p} X_2[P(a)] = 0. \quad (6.1)$$

В системе (3.4) будут два таких уравнения

$$\begin{aligned} F_1(b) &\equiv \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} S_{11}(b) + \frac{\partial}{\partial \xi} S_{13}(b) + \lambda^{-l} X_1[Q(b)] = 0, \\ F_3(b) &\equiv \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} S_{13}(b) + \frac{\partial}{\partial \xi} S_{33}(b) + \lambda^{-l} X_3[Q(b)] = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из (6.1), (6.2) очевидным образом получаются равенства

$$\begin{aligned} \iint_G F_1(b) dG &= \iint_G F_2(a) dG = \iint_G F_3(b) dG = \\ &= \iint_G [\xi F_1(b) + A_1 \xi'_1 F_3(b)] dG. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Они выражают четыре условия уравниваемости в целом рассматриваемого НДС в области  $G\{0 \leq \xi'_1 \leq d; -1 \leq \xi \leq +1\}$ , в которой должны быть построены решения вспомогательных задач.

Равенства (6.3) можно преобразовывать традиционными в теории упругости методами с помощью интегрирований по частям и замены порядка интегрирования. Будем считать, что эти равенства составлены для затухающих решений вспомогательных задач раздела 5, причем длина  $d$  прямоугольника  $G$  выбрана настолько большой, чтобы из условий затухания с достаточной точностью следовали соотношения

$$S_{11}(b) |_{\xi'_1=d} = S_{12}(a) |_{\xi'_1=d} = \xi'_1 S_{11}(b) |_{\xi'_1=d} = S_{13}(b) |_{\xi'_1=d} = 0. \quad (6.4)$$

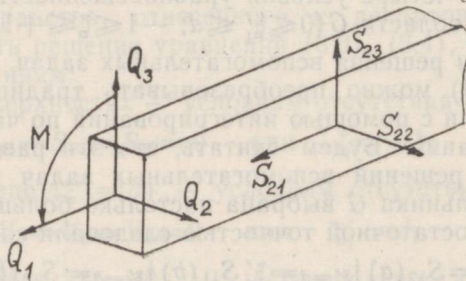


Тогда в процессе преобразований равенств (6.3) можно использовать не только лицевые условия (5.2), но и соотношения (6.4). В результате (6.3) примут вид

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-1}^{+1} S_{11}(b) \Big|_{\xi'_1=0} d\xi + \lambda^{-l} \iint_G X_1[Q(b)] dG = 0, \\
 & - \int_{-1}^{+1} S_{12}(a) \Big|_{\xi'_1=0} d\xi + \lambda^{-l} \iint_G X_2[P(a)] dG = 0, \\
 & - \int_{-1}^{+1} S_{13}(b) \Big|_{\xi'_1=0} d\xi + \lambda^{-l} \iint_G X_3[Q(b)] dG = 0, \\
 & - \int_{-1}^{+1} S_{11}(b) \Big|_{\xi'_1=0} d\xi - \iint_G (A_1 - A_1|_{\xi'_1=0}) S_{13}(b) dG + \\
 & + \lambda^{-l} \iint_G \{X_1[Q(b)]\xi - X_3[Q(b)]A_1\xi_1\} dG = 0.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Эти равенства представляют собой четыре условия самоуравновешенности в целом НДС, являющегося решением вспомогательной задачи (раздел 5). В них существенно использованы соотношения (6.4). Это значит, что (6.5) являются необходимыми условиями затухания для вспомогательной задачи. Примем, что они являются и достаточными. Более того, будем считать, что обусловленное требованиями (6.4) затухание является экспоненциальным, и назовем (6.5) условиями Сен-Венановского затухания для вспомогательных задач теории пограничных слоев.

Остановимся на физическом смысле условий (6.5). С точностью  $[0(\lambda^{-l} + \lambda^{-2l+2p}) = 0]$  в (3.3), (3.4) можно отбросить все величины  $X(\cdot)$ ,  $e(\cdot)$ . Тогда эти равенства превратятся в уравнения теории упругости, записанные в декартовых координатах ( $\xi'_1$ ,  $\xi_2$ ,  $\zeta$ ) и описывающие такие НДС, которые можно назвать квазиплоскими: в них отличны от нуля все напряжения и перемещения  $S_{ij}$ ,  $V_k$ , но эти величины сохраняют постоянные значения по координате  $\xi_2$  (в ортогональном к плоскости  $\xi'_1\zeta$  направлении). Таким образом, при указанной выше точности, когда в левых частях (6.5) можно оставить только первые слагаемые, эти равенства превращаются в физически очевидные необходимые и достаточные условия применимости принципа Сен-Венана для прямоугольной плитки единичной толщины, изображенной на рисунке и испытываемой квазиплоское НДС. Они заключаются в требовании обращения в нуль торцевых сил  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  и изгибающего момента  $M$  (требование отсутствия торцевого крутящего момента в их число не входит, так как он может быть уравновешен напряжениями  $S_{23}$ , развивающимися на сечениях  $\xi_2 = \pm l/2$ ).





В силу постулированного экспоненциального закона затухания с точностью  $[0(\lambda^{-\rho})=0]$  при любом положительном  $\rho$  будет справедливо равенство

$$\iint_G (A_1 - A_1|_{\xi'_1=0}) S_{13} dG = 0, \quad (6.6)$$

и в дальнейшем в условиях (6.5) соответствующее слагаемое будет всегда отбрасываться. Для напоминания об этом Сен-Венановские условия затухания ниже будут цитироваться как равенства (6.5), (6.6).

7. Будем считать, что полное НДС оболочки  $W(f)$  представимо в виде

$$W(f) = \lambda^l W(in) + \lambda^\alpha W(a) + \lambda^\beta W(b), \quad (7.1)$$

где  $W(in)$  — внутреннее НДС, а  $W(a)$ ,  $W(b)$  — затухающие решения антиплоской и плоской задачи (раздел 5), т. е. погранслои. Множитель  $\lambda^l$  при  $W(in)$  поставлен условно. В конкретных задачах он определяется асимптотикой внешних воздействий, порождающих рассматриваемое НДС оболочки. В (7.1) этот множитель выбран так, чтобы в соотношениях (2.1), (2.3) величины  $W$  имели вид  $0(\lambda^0)$ .

Числа  $\alpha$ ,  $\beta$  в множителях при  $W(a)$ ,  $W(b)$  назовем показателями интенсивности погранслоев. Эти множители введены потому, что уравнения (3.3), (3.4) погранслоев однородны и их решения определены лишь с точностью до постоянных факторов пропорциональности.

Физически очевидное предположение (7.1) математически подтверждается тем, что, как выяснится ниже, в конкретных задачах определенные  $W(in)$ ,  $W(a)$ ,  $W(b)$  приводится к корректно поставленным крайевым задачам. При этом числа  $\alpha$ ,  $\beta$  должны быть единственным образом выбраны с учетом условий закрепления рассматриваемого торца оболочки.

В конкретных задачах для определенности будем считать, что оболочка имеет один замкнутый торец, проходящий вдоль линии  $\alpha_1=0$  ее срединной поверхности. Кроме того, примем, что торцевые условия однородны, т. е. что исследуемое НДС порождается силами, приложенными к лицевым поверхностям оболочки.

8. Рассмотрим случай, когда торец оболочки свободен и на нем должны выполняться следующие условия теории упругости

$$\tau_1 = \tau_{12} = \tau_{13} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0.$$

Тогда в соответствии с концепцией (7.1) надо соблюдать, чтобы выполнялись следующие требования

$$\begin{aligned} \lambda^l (\tau_1^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_1^1) + \lambda^{-l+p+\alpha} ES_{11}^1(a) + \lambda^\beta ES_{11}(b) &= 0, \\ \lambda^l (\tau_{12}^0 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta \tau_{12}^1) + \lambda^\alpha ES_{12}(a) + \lambda^{-l+p+\beta} ES_{12}^1(b) &= 0, \\ \lambda^p (\tau_{13}^0 + \zeta \tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c} \zeta^2 \tau_{13}^2) + \lambda^{-l+p+\alpha} ES_{13}^1(a) + \\ + \lambda ES_{13}(b) &= 0 \quad (\text{при} \alpha_1 = 0). \end{aligned} \quad (8.1)$$

В них напряжения внутреннего НДС, антиплоского и плоского погранслоев выражены формулами (2.1), (4.2), (4.3), и для простоты считается, что  $b=0$ .

Все перечисленные соотношения составлены с точностью  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$ . Такую же точность имеют и граничные равенства (8.1).

Показатели интенсивности погранслоев  $\alpha$ ,  $\beta$  в (8.1) надо выбрать так, чтобы дальнейшие рассуждения не наткнулись на противоречия, о



которых будет сказано ниже. Для свободного края такие непротиворечивые значения  $\alpha$ ,  $\beta$  определяются формулами

$$\alpha = 2p - c, \quad \beta = p. \quad (8.2)$$

Из них следует, что после введения некоторых постоянных множителей и отбрасывания слагаемых, выходящих за рамки точности  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$ , граничные равенства (8.1) можно переписать так

$$\begin{aligned} ES_{11}(b) + \lambda^{-l+2p-c} ES_{11}^1(a) &= -(\lambda^{l-p}\tau_1^0 + \lambda^{p-c}\xi\tau_1^1), \\ ES_{13}(b) + \lambda^{-l+2p-c} ES_{13}^1(a) &= -(\tau_{13}^0 + \xi\tau_{13}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\xi^2\tau_{13}^2), \\ ES_{12}(a) + \lambda^{-l+c} ES_{12}^1(b) &= -(\lambda^{l-2p+c}\tau_{12}^0 + \xi\tau_{12}^1). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь, как легко проверить с помощью формул (2.4), в левых частях показатели степеней  $\lambda$  отрицательны.

Входящие в (8.3) величины  $W(in)$  определены в разделе 2. Во внутренних точках срединной поверхности они должны иметь вид  $0(\lambda^p)$ . При этом, как указано в разделе 7, надо считать, что  $q=0$ .

На линии  $\alpha_1=0$  срединной поверхности, где только и справедливы равенства (8.3), должны выполняться некоторые однородные граничные условия. Примем дополнительное предположение, что вследствие этого справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \tau_1^0|_{\alpha_1=0} &= 0(\lambda^{-l+p}), & \tau_{12}^0|_{\alpha_1=0} &= 0(\lambda^{-l+2p-c}), \\ \tau_1^1|_{\alpha_1=0} &= 0(\lambda^{-p+c}). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Для граничных значений величин  $W(in)$ , не вошедших в (8.4), сохраняется соотношение

$$[W(in)]_{\alpha_1=0} = 0(\lambda^0).$$

Рассмотрим равенства (8.3) как сформулированные выше условия на ближнем торце  $\xi'_1=0$  для вспомогательных задач (раздел 5), отнесем первые два из них к плоскому, а третье — к антиплоскому погранслою и будем пока считать в них известными величинами, обозначенные в (7.1) через  $W(in)$ .

Согласно (2.4) число  $-l+2p-c$  отрицательно при  $p < l/2$  и равно нулю при  $p \geq l/2$ . Кроме того, приняты соотношения (8.4). Из них вытекает, что (8.3) при  $\lambda \rightarrow \infty$  обладают следующими свойствами:

- все их коэффициенты остаются конечными;
- ни одна из левых частей не исчезает тождественно;
- по меньшей мере одна из правых частей первых двух равенств (8.3), а также правая часть третьего равенства (8.3) не исчезает тождественно.

В этом заключается одна непротиворечивость принятых значений  $\alpha$ ,  $\beta$ . При любых других  $\alpha$ ,  $\beta$  торцевые условия (8.3) не будут обладать перечисленными свойствами.

9. Результаты раздела 8, относящиеся к свободному краю, легко переносятся на случай, когда край имеет те или иные закрепления. Приведем без пояснений соответствующие соотношения для случаев:

- жестко заделанный край ( $v_1=v_2=v_3=0$ ),
  - шарнирно опертый край ( $\tau_1=\tau_2=\tau_3=0$ ),
  - шарнирно опертый край ( $v_1=\tau_{12}=\tau_{13}=0$ )
- (в скобках указаны соответствующие граничные условия трехмерной теории упругости).



Формулы (8.2) для показателей интенсивности погранслоев в случаях I, II записывают так:

$$\alpha = p, \quad \beta = l, \quad (9.1)$$

а в случае III сохраняет силу (8.2).

Торцевые условия, вытекающие из концепции (7.1), имеют вид:

в случае I

$$\begin{aligned} RV_1(b) &= -\lambda^{l-p}v_1^0 - \lambda^{p-c}\zeta v_1^1, \\ RV_3(b) &= -\lambda^{l-c}v_3^0 - \zeta v_3^1, \\ R[V_2(a) + V_2^1(b)] &= -\lambda^{2l-2p}v_2^0 - \lambda^{l-c}v_2^1; \end{aligned} \quad (9.2)$$

в случае II

$$\begin{aligned} ES_{11}(b) &= -\tau_1^0 - \lambda^{-l+2p-c}\zeta\tau_1^1, \\ RV_3(b) &= -\lambda^{l-c}v_3^0 - \zeta v_3^1, \\ R[V_2(a) + V_2^1(b)] &= -\lambda^{2l-2p}(v_2^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta v_2^1); \end{aligned} \quad (9.3)$$

в случае III

$$\begin{aligned} R[V_1(b) + \lambda^{-l+2p-c}V_1^1] &= -\lambda^{2l-2p}v_1^0 + \lambda^{l-c}\zeta v_1^1, \\ E[S_{13}(b) + \lambda^{-l+2p-c}S_{13}^1(a)] &= -\tau_{13}^0 - \zeta\tau_{13}^1 - \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2\tau_{13}^2, \\ E[S_{12}(a) + \lambda^{-l+c}S_{12}^1(b)] &= -\lambda^{l-2p+c}\tau_{12}^0 - \zeta\tau_{12}^1. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Дополнительные предположения (8.4) можно переписать так:

в случае I

$$(\lambda^{l-p}v_1^0, \lambda^{p-c}v_1^1, \lambda^{2l-2p}v_2^0, \lambda^{l-c}v_1^1, \lambda^{l-c}v_3^0)_{\xi_i=0} = 0(\lambda^0), \quad (9.5)$$

в случае II

$$(\lambda^{l-c}v_3^0, \lambda^{2l-2p}v_2^0, \lambda^{l-c}v_2^1)_{\xi_i=0} = 0(\lambda^0); \quad (9.6)$$

в случае III

$$(\lambda^{2l-2p}v_1^0, \lambda^{l-c}v_1^1, \lambda^{l-2p+c}\tau_{12}^0)_{\xi_i=0} = 0(\lambda^0). \quad (9.7)$$

Легко убедиться, что при выполнении этих предположений правые части торцевых условий вспомогательных задач во всех трех случаях будут обладать оговоренными в разделе 8 свойствами, подтверждающими непротиворечивость выбранных значений  $\alpha, \beta$ .

10. В формуле (7.1), определяющей структуру полного НДС оболочки, в статическом случае можно предполагать, что погранслои  $W(a)$  и  $W(b)$  экспоненциально затухают. Это значит, что каждую тройку граничных равенств (8.3), (9.2), (9.3), (9.4) следует рассматривать совместно с условиями Сен-Венановского затухания (6.5), (6.6). Напомним, что в перечисленных равенствах величины  $W(in)$ , относящиеся к внутреннему НДС, считались условно известными. На них теперь надо наложить требования, обеспечивающие выполнение условий затухания. Решение этого вопроса наталкивается на трудности, связанные с тем, что в (6.5), (6.6) содержатся фиктивные массовые силы  $X_i[ ]$ , сложно связанные с величинами  $W(in)$ . Поэтому здесь, как и при построении двумерных дифференциальных уравнений теории оболочек, естественно использовать итерационный подход.



Отбросим в (6.5), (6.6) все члены с множителем  $\lambda^{-l}$ , т.е. примем условия затухания в виде

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} S_{11}(b) |_{\xi_1=0} d\xi &= \int_{-1}^{+1} S_{12}(a) |_{\xi_1=0} d\xi = \\ &= \int_{-1}^{+1} S_{13}(b) |_{\xi_1=0} d\xi = \int_{-1}^{+1} S_{11}(b) |_{\xi_1=0} \xi d\xi = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Тогда, например, накладываемые на величины  $W(in)$  требования для свободного края будут выводиться следующим образом. Выполним над всеми тремя соответствующими граничными равенствами (8.1) операцию  $\int_{-1}^{+1} d\xi$ , а над первым из них еще операцию  $\int_{-1}^{+1} \xi d\xi$  и примем во внимание (8.2), (10.1). Получим

$$\begin{aligned} 2\tau_1^0 &= -\lambda^{-2l+3p-c} \int_{-1}^{+1} ES_{11}^1(a) d\xi - \lambda^{-l+p} \int_{-1}^{+1} ES_{11}(b) d\xi, \\ 2\tau_{12}^0 &= -\lambda^{-l+2p-c} \int_{-1}^{+1} ES_{12}(a) d\xi, \\ 2\left(\tau_{13}^0 + \frac{1}{3} \lambda^{-l+2p-c} \tau_{13}^2\right) &= -\int_{-1}^{+1} ES_{13}(b) d\xi - \lambda^{-l+2p-c} \int_{-1}^{+1} ES_{13}^1(a) d\xi, \quad (10.2) \\ \frac{2}{3} \tau_1^1 &= -\lambda^{-p+c} \int_{-1}^{+1} ES_{11}(b) \xi d\xi - \lambda^{-l+p} \int_{-1}^{+1} ES_{11}^1(a) \xi d\xi. \end{aligned}$$

В этих равенствах левые части можно выразить через граничные значения усилий и моментов оболочки по формулам (2.5). Заметим также, что в рамках точности  $[0(\lambda^{-l+p})=0]$  в правых частях равенств (10.2) можно положить равными нулю все слагаемые кроме того, которое входит в третье из них и содержит множитель  $\lambda^{-l+2p-c}$ . Это можно проверить, учитывая, что  $-2l+3p-c \leq -l+p$ , и приняв во внимание равенства (6.5), (6.6). В результате (10.2) превратится в канонические граничные условия двумерной теории оболочек. В них член с множителем  $\lambda^{-l+2p-c}$  соответствует известной поправке от крутящих моментов.

Канонические граничные условия, как известно, определяют единственным образом решение дифференциальных уравнений двумерной теории оболочек. Вместе с ними определяются по формулам (3.5)–(3.7) и отброшенные ранее величины  $X(\cdot)$ , а следовательно, может быть продолжен обсуждаемый здесь итерационный процесс вывода граничных условий.

Кроме канонических граничных условий, имеющих, как сейчас показано, точность  $[0(\lambda^{-l+p})=0]$ , в литературе [1–5] обсуждаются и приведенные граничные условия, имеющие точность  $[0(\lambda^{-2l+2p})=0]$ . Из (10.2) видно, что в них можно было бы ожидать поправок не только для перерезывающих усилий, но и в граничных условиях для нормальной силы, а также для изгибающего момента. Однако более детальное рассмотрение [1, 2] показывает, что сохраняется лишь вторая из поправок. На этом, а также на рассмотрении граничных условий для случаев I, II, III, останавливаться не будем. Отметим только, что если целью двумерной теории оболочек считать приближенное построение внутреннего НДС, то число граничных условий должно всегда равняться четырем по числу условий Сен-Венановского затухания (6.5), (6.6).



11. Обсудим асимптотику краевого НДС оболочки, исходя из формулы (7.1) и пользуясь результатами разделов 8, 9.

Так как в (7.1) НДС, обозначенные через  $W(in)$ ,  $W(a)$ ,  $W(b)$ , асимптотически соизмеримы в том смысле, что в них асимптотически главные напряжения имеют одинаковый порядок, то поставленный вопрос сводится к нахождению среди тройки показателей  $(l, a, \beta)$  тех, которые имеют наибольшие значения.

Из (2.4), (8.2) следует, что если край оболочки свободен или на нем осуществлено шарнирное закрепление III, то для теории оболочек справедливы утверждения:

(а) при  $p < l/2$  (если показатель изменяемости внешнего воздействия  $q < 1/2$ ) выполняются неравенства

$$\beta \leq a < l, \quad (11.1)$$

показывающие, что асимптотически главный вклад в краевое НДС определяет внутреннее НДС;

(б) при  $p \geq l/2$  (если показатель изменяемости внешнего воздействия не меньше  $1/2$ ) вместе (11.1) будут справедливы соотношения

$$\beta < a = l,$$

показывающие, что главный асимптотический вклад в краевое НДС определяют внутреннее НДС и антиплоский погранслои.

Заметим, что асимптотика внутреннего НДС оболочки задается формулами раздела 2. Они определяют также и асимптотику внутреннего НДС пластинки (как при изгибе, так и при растяжении), если в соответствующих соотношениях положить  $c = 2p - l$ . В этом можно убедиться также по результатам [6]. Поэтому для пластинки вблизи свободного края или края с шарниром III при любом  $q$  на интервале  $(0, 1)$  обсуждаемая ситуация будет такой же, как в оболочке при  $q \geq 1/2$ .

Если край заделан или имеет шарнирную опору II, то для показателей интенсивности погранслоев справедливы формулы (9.1). Они означают, что при  $0 \leq q < 1$ , т. е. при любой изменяемости внешнего воздействия, допустимой в двумерной теории оболочек, справедливы соотношения

$$\alpha < \beta = l.$$

Это значит, что как в оболочке, так и в пластинке при любой изменяемости внешнего воздействия на крае внутреннего НДС и плоский погранслои асимптотически соизмеримы по напряжениям, а антиплоский погранслои пренебрежимо мал.

12. Как известно, переход от теорий Кирхгофа-Лява к сдвиговым двумерным теориям оболочек и пластин сопровождается повышением порядка дифференциальных уравнений (в частности, в теории изгиба пластинок с четвертого по шестой). В результате, среди решений, образующих общее НДС изгибаемой пластинки, появляются «лишние» НДС. Они имеют такой же затухающий характер, как и погранслои. Поэтому, естественно, возникает вопрос: в каких случаях использование «лишних» НДС позволяет получить такую уточненную картину краевых упругих явлений пластинки, в которой не была искажена хотя бы асимптотика главных перемещений и напряжений.

В [5] изложена сдвиговая теория изгиба пластинок, позволяющая легко установить асимптотику «лишнего» быстро затухающего НДС. Сравнив ее с полученной здесь асимптотикой погранслоев, можно заключить, что они совпадают для антиплоского погранслоя, в котором главными являются величины  $P$ , и коренным образом расходятся для плоского погранслоя, в котором главными являются величины  $Q$  (раздел 3). В связи с этим становится совершенно не очевидным, является



ли преимуществом сдвиговых теорий то обстоятельство, что в них более высок порядок дифференциальных уравнений. Результаты раздела 11 позволяют сделать следующие выводы.

Если края пластинки свободны или имеют шарнир III, то корректировку краевого НДС пластинки можно получить как с помощью сдвиговой теории, так и с помощью теории антиплоского погранслоя. В вычислительном отношении оба способа одинаково просты, а асимптотика поправочного НДС будет в обоих случаях правильной.

Если края пластинки заделаны или имеют шарнир II, то корректировка с помощью сдвиговой теории будет достигаться существенно проще, а асимптотика так полученного поправочного НДС будет грубо неправильной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Наука, Москва, 1976.
2. Гольденвейзер А. Л. ПММ, 1969, 33, вып. 996—1028.
3. Колос А. В. ПММ, 1965, 29, вып. 4, 771—781.
4. Koiter, W. T. and Simmonds J. G. Proc. 13 Congr. on Theor. and Appl. Mech. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973, 150—176.
5. Reissner, E. ASME Appl. Mech., 47, 559—561.
6. Гольденвейзер А. Л., Каплунов Ю. Д., Нольде Е. В. Изв. АН СССР. МТТ, 1990, 6, 124—138.

Поступила в редакцию  
18/IX 1992

*Aleksei GOLDENVEIZER*

#### OHUKESE ELASTSE KOORIKU PINGE-DEFORMATSIOONISEISUNDI ÄÄREEFEKTIST

Ohukese elastse kooriku pinge-deformatsiooniseisundi asümptootilise analüüsi alusel on uuritud piirikihi asümptootilist panust äärenähtuste kujunemisele sõltuvalt kooriku serva kinnitamise iseloomust. On hinnatud nihet arvestavate teooriate kasutamise põhjendatust koorikute ja plaatide pinge-deformatsiooniseisundi nn. ääreefekti arvutamiseks täpsustamiseks.

*Aleksei GOLDENVEIZER*

#### ON BOUNDARY STRESS-STRAIN STATE OF THIN ELASTIC SHELLS

The boundary stress-strain state of a thin elastic shell is analyzed asymptotically. The contribution of the boundary layer in the formation of elastic boundary phenomena in the thin elastic shell is investigated for the various types of the fixations. The correctness of using the shear-type theories is discussed for the refinement of the calculation of the boundary stress-strain states in thin shells and plates.